Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica mod. 2

Prof. R. Ghiselli Ricci, D. Pasetto

Tema A - 17/06/2024

Tempo a disposizione: 2h

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Voto Analisi Matematica mod 1: ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. È permesso utilizzare un formulario personale scritto su un foglio A4 (fronte/retro).
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Si potrà abbandonare l'aula solo al termine delle operazioni di consegna, rispettando le indicazioni dei docenti.

Problema 1 (8 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $ty' + 2t^2y^3 - ty^3 = 0$

1.2 Trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(-1) = -1$ e determinare il massimo intervallo su cui è definita.

Problema 2 (7 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = |t|\,(\cos(t), \sin(t))\,, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

2.1 Determinare se γ è chiusa, semplice e regolare.

2.2 Disegnare qualitativamente il sostegno e indicare il verso di percorrenza.

2.3 Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della retta tangente a γ in $t = -\frac{\pi}{2}$

Problema 3 (11 punti)

Considerare la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x, y) = x^4 - 8xy + 2y^2 - 16x + 8y$$

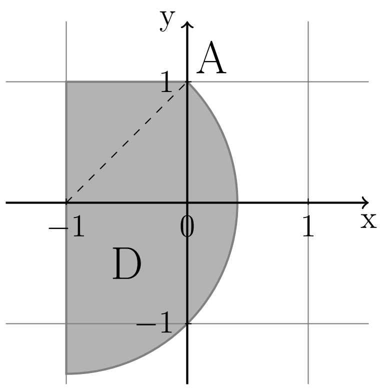
3.1 Disegnare un grafico qualitativo della sezione $y = 0$.

3.2 Mostrare che f ha due estremi locali. Difficile: mostrare che questi estremi sono anche globali.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $Q = (0, -2)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(-1, 0)$; il vertice A ha coordinate $A = (0, 1)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'integrale di $f(x, y) = 2xy$ su D.



Soluzioni

Problema 1

1. Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $\quad ty' + 2t^2y^3 - ty^3 = 0$

   (5p totali)

   Si tratta di un'equazione a variabili separabili, $ty' = (t - 2t^2)y^3$, quindi, ponendo $t \neq 0$:
   $$a(t) = 1 - 2t \quad , \quad b(y) = y^3$$
   Si noti che $b(y) = 0 \iff y = 0$, quindi $y(t) \equiv 0$ è soluzione costante. (1p)

   Per $y \neq 0$ e $t \neq 0$ possiamo risolvere separando le variabili ed integrando (2p):
   $$\int \frac{1}{y^3}\, dy = \int (1 - 2t)\, dt$$
   $$-\frac{1}{2}y^{-2} = t - t^2 + c$$
   al variare di $c \in \mathbb{R}$. Ora cerchiamo di esplicitare la variabile dipendente (2p):
   $$y^{-2} = -2t + 2t^2 - 2c$$
   $$y^2 = \frac{1}{-2t + 2t^2 - 2c}$$
   $$y = \pm\frac{1}{\sqrt{-2t + 2t^2 - 2c}}$$
   A questo insieme di soluzioni va unita la soluzione costante $y(t) \equiv 0$

2. Trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $\; y(-1) = -1$ e determinare il massimo intervallo su cui è definita.

   (3p totali)

   - (a) Imponendo la condizione iniziale nell'integrale generale si ha:
     $$1 = \frac{1}{2 + 2 - 2c} \implies c = \frac{3}{2}$$
     Per cui la soluzione cercata è (2p):
     $$y = -\frac{1}{\sqrt{2t^2 - 2t - 3}}$$
     Per trovare il massimo intervallo di esistenza dobbiamo imporre
     $$2t^2 - 2t - 3 > 0 \implies t < \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \;\vee\; t > \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$$
     Ricordando che tale intervallo deve contenere il punto $t = -1$, il dominio richiesto è: $D =]-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{2}[$ (1p).

Problema 2

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = |t|\,(\cos(t), \sin(t))\,, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

2.1 Determinare se γ è chiusa, semplice e regolare.

(3p totali)

Si ha $\mathbf{r}(-\pi) = (-\pi, 0)$ e $\mathbf{r}(\pi) = (-\pi, 0)$, quindi γ è chiusa. (1p)

Per la semplicità, notiamo che si tratta di una curva in forma polare con centro l'origine. La distanza dall'origine è data dal termine $\rho(t) = |t|$. Questa curva non è semplice se esistono $t_1 \in [-\pi, \pi]$, $t_2 \in]\pi, \pi[$, con $t_1 < t_2$, per cui

$$\begin{cases} \rho(t_1) = \rho(t_2) \\ t_2 = t_1 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ipotizziamo che la curva non sia semplice: in tal caso, la prima condizione conduce a $t_1 = -t_2$. Di conseguenza, $t_1 < t_2$ implica che $t_2 > 0$. Se operiamo la sostituzione $t_1 = -t_2$ nella seconda condizione, otteniamo $t_2 = k\pi$, poi, tenendo conto del dominio e del fatto che $t_2 > 0$, deduciamo che l'unico valore accettabile di k sia $k = 1$, sicché $t_1 = -\pi$ e $t_2 = \pi$. Pertanto, la curva è semplice, perché gli unici valori accettabili di t_1 e t_2 sono proprio gli estremi. (1p)

Possiamo mostrare che la curva non è regolare. Notiamo infatti che $\mathbf{r}(t)$ si può riscrivere come:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = -t\,(\cos(t), \sin(t)) & , \quad t \in [-\pi, 0] \\ \mathbf{r}_2(t) = t\,(\cos(t), \sin(t)) & , \quad t \in [0, \pi] \end{cases}$$

Derivando, si ottiene:

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1'(t) = (-\cos(t) + t\sin(t), -\sin(t) - t\cos(t)) & , \quad t \in [-\pi, 0[\\ \mathbf{r}_2'(t) = (\cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t)) & , \quad t \in]0, \pi] \end{cases}$$

Pertanto, $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono regolari per $t \in [-\pi, 0[$ e $t \in]0, \pi]$, ma in $t = 0$ il vettore tangente non è definito, perché $\mathbf{r}_1'(0) = (-1, 0)$ e $\mathbf{r}_2'(0) = (1, 0)$. (1p)

2.2 Disegnare qualitativamente il sostegno e indicare il verso di percorrenza.

(2p totali)

Il supporto di $\mathbf{r}_2(t)$ è un arco della spirale di Archimede, percorsa per $t \in [0, \pi]$ (1p). Il supporto di $\mathbf{r}_1(t)$ è il simmetrico di $\mathbf{r}_2(t)$ rispetto all'asse x. Infatti, ponendo $\mathbf{r}_1(t) = (X_1(t), Y_1(t))$ e $\mathbf{r}_2(t) = (X_2(t), Y_2(t))$, si può notare che:

$$X_1(t) = X_2(-t) \quad ; \quad Y_1(t) = -Y_2(-t)$$

(1p). Entrambe le curve sono percorse in senso antiorario.

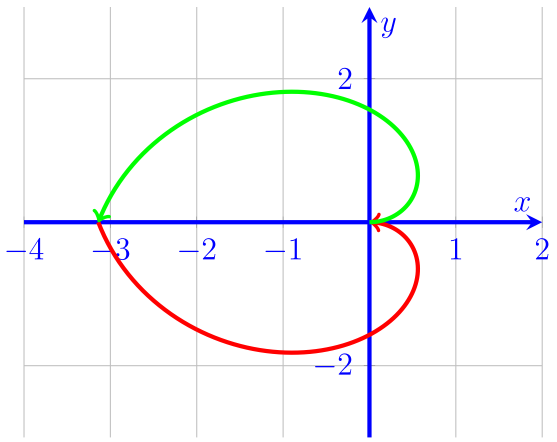


Figura 1: Supporto della curva parametrica ($\mathbf{r}_1$ in rosso e $\mathbf{r}_2$ in verde).

2.3 Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della retta tangente a γ in $t = -\frac{\pi}{2}$

(2p totali)

Abbiamo che $\mathbf{r}(-\pi/2) = (0, -\pi/2)$; $\mathbf{r}'(-\pi/2) = (\pi/2, 1)$ Quindi l'equazione parametrica della retta tangente è (1p):

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\pi}{2}(t + \frac{\pi}{2}) \\ y(t) = -\frac{\pi}{2} + (t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

L'equazione cartesiana diventa: $y = \frac{2}{\pi}x - \frac{\pi}{2}$ (1p).

Problema 3

Considerare la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$f(x, y) = x^4 - 8xy + 2y^2 - 16x + 8y$$

3.1 Disegnare un grafico qualitativo della sezione $y = 0$.

La sezione $y = 0$ è $z = x^4 - 16x = x(x^3 - 16)$. Questo polinomio di quarto grado ha zeri in $x_1 = 0$ e $x_2 = \sqrt[3]{16}$ e minimo globale in $x = \sqrt[3]{4}$ (1 p).

3.2 Mostrare che f ha due estremi locali. Difficile: mostrare che questi estremi sono anche globali.

(8p totali)

Il gradiente di f è: (2 p):

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 8y - 16 \\ -8x + 4y + 8 \end{pmatrix}$$

I punti stazionari si trovano imponendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} 4x^3 - 8y - 16 = 0 \\ -8x + 4y + 8 = 0 \end{cases}$$

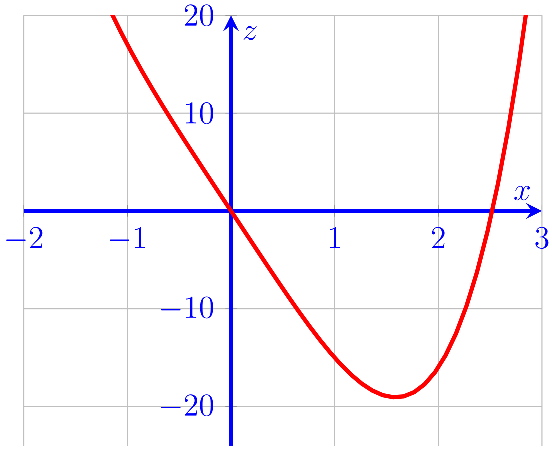


Figura 2: Sezione $x = f(x, 0)$

Dalla seconda equazione si ottiene $y = 2x - 2$.

Sostituendo nella prima equazione si ha

$$4x^3 - 16x = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm 2$$

quindi si trovano i punti stazionari $P_1 = (0, -2)$, $P_2 = (2, 2)$ e $P_3 = (-2, -6)$ (2 p).

Cerchiamo di usare il test della matrice Hessiana per caratterizzare tali punti. In un punto (x, y) la matrice Hessiana H_f è: (1 p):

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Il cui determinante vale $\det H_f(x, y) = 48x^2 - 64$. Caratterizzazione punti stazionari (1 p):

- P_1: $H_f(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$. La matrice Hessiana in P_1 è indefinita, quindi P_1 è punto di sella.
- P_2: $H_f(2, 2) = \begin{pmatrix} 48 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$. $H_f(P_2)$ è definita positiva, quindi P_2 è punto di minimo locale.
- P_3: $H_f(-2, -6) = \begin{pmatrix} 48 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$. $H_f(P_2)$ è definita positiva, quindi P_3 è punto di minimo locale.

Difficile (2p): Abbiamo che $f(P_2) = f(P_3) = -24$. Tali punti sono minimi globali se per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha che $f(x, y) \geq -24$, ossia dobbiamo mostrare che la seguente disuguaglianza è sempre soddisfatta:

$$x^4 - 8xy + 2y^2 - 16x + 8y + 24 \geq 0$$

Supponiamo di fissare il valore di $x = x_0$. Al primo membro della suddetta disequazione otteniamo una funzione, detta $g(y)$, di secondo grado in y data da

$$g(y) = 2y^2 + 8(1 - x_0)y + x_0^4 - 16x_0 + 24.$$

Per ogni valore di x_0, $g(y)$ è una parabola rivolta verso l'alto, con vertice (punto di minimo della parabola) in $y_V(x_0) = 2(x_0 - 1)$. Pertanto, per mostrare che la nostra disuguaglianza è sempre soddisfatta basta mostrare che $g(y_V(x_0)) \geq 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Chiamiamo $h(x) = g(y_V(x))$:

$$h(x) = g(y_V(x)) = 8(x-1)^2 - 16(x-1)^2 + x^4 - 16x + 24 = x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$$

da cui immediatamente segue che $h(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $Q = (0, -2)$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

(2p totali)

$$\nabla f(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

infatti $Q = (0, -2)$ è un punto stazionario. In tale punto il versore di massima crescita non è definito. (1p).

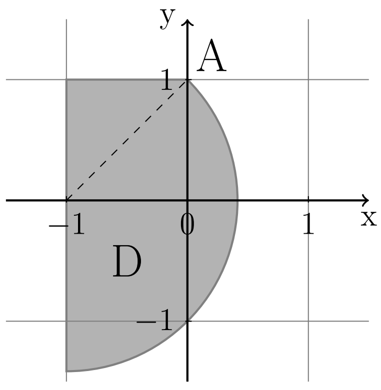
Il piano tangente al grafico di f in Q è il piano orizzontale di equazione: (1p)

$$z = f(0, -2) = -8$$

.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(-1, 0)$; il vertice A ha coordinate $A = (0, 1)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'integrale di $f(x, y) = 2xy$ su D.



Il dominio D si può scrivere come un dominio y-normale: (2 p):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -\sqrt{2} \leq y \leq 1 \quad , \quad -1 \leq x \leq -1 + \sqrt{2 - y^2}\}$$

Quindi l'integrale di f su D si ottiene da (4 p):

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{1} \left(\int_{-1}^{-1+\sqrt{2-y^2}} 2xy\,dx \right) dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{1} 2y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{-1+\sqrt{2-y^2}} dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{1} y \left(2 - y^2 - 2\sqrt{2-y^2} \right) dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{1} 2y - y^3 - 2y\sqrt{2-y^2}\,dy =$$

$$= \left[y^2 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{2}{3}(2-y^2)^{3/2} \right]_{-\sqrt{2}}^{1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - 2 + 1 = \frac{5}{12}$$

Soluzione alternativa

Lo stesso risultato si può ottenere scrivendo il dominio come unione di due insiemi disgiunti: $D = D_1 \cup D_2$ dove D_1 è il triangolo di vertici ABC, con $B = (-1, 1)$, $C = (-1, 0)$; D_2 è il settore circolare. D_1 si può scrivere come dominio x-normale (1 p):

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 0 \quad , \quad x+1 \leq y \leq 1\}$$

D_2 si può scrivere in coordinate polari ($x = -1 + \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$) come il dominio D_2', (1 p)

$$D_2' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$$

Quindi l'integrale di f su D si ottiene da :

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int\int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Su D_1: (2 p)

$$\int\int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{x+1}^{1} 2xy\,dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} 2x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x+1}^{1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x(-x^2 - 2x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{12}$$

Su D_2: (2 p)

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 2(-1+\rho\cos(\theta))\rho^2 \sin(\theta)\,d\theta \right) d\rho = \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -2\rho^2 \sin(\theta)\,d\theta \right) d\rho + \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} 2\rho^3 \cos(\theta)\sin(\theta)\,d\theta \right) d\rho = \\
&= \left[\frac{-2\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} \left[-\cos(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} \left[\sin^2(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{8+3-6}{6} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$